

# Principes de minimisation dans les mouvements humains: l'approche par le contrôle optimal inverse

Travaux du Projet GECO, INRIA Saclay

Frédéric JEAN (ENSTA ParisTech)



## Membres de GECO impliqués:

- Y. Chitour, F. Chittaro, P. Mason (LSS)
- F. Jean (ENSTA ParisTech)
- J-P. Gauthier (Univ. Toulon)

## Collaborateurs extérieurs à GECO (physiologistes):

- B. Berret, C. Papaxanthis, T. Pozzo (INSERM Dijon)
- C. Darlot (CNRS / ENST)

- 1 Contrôle optimal inverse
- 2 Goal oriented human locomotion
- 3 Mouvements de pointage

# Outline

- 1 Contrôle optimal inverse
- 2 Goal oriented human locomotion
- 3 Mouvements de pointage

# Contrôle optimal inverse

- Analyse/modélisation du contrôle moteur  
→ recherche de principes d'optimalité
- Sujets étudiés:
  - Locomotion humaine
  - Mouvements de pointage du bras
  - Saccades oculaires
- Formulation mathématique: **le contrôle optimal inverse**

Connaissant  $\dot{X} = \phi(X, u)$  et un ensemble  $\Gamma$  de trajectoires, trouver un coût  $J(X_u)$  tel que tout  $\gamma \in \Gamma$  soit solution de

$$\inf\{J(X_u) : X_u \text{ traj. t.q. } X_u(0) = \gamma(0), X_u(T) = \gamma(T)\}.$$

- Difficultés:
  - $\Gamma$  = données expérimentales (bruits, feedbacks, etc)
  - Modèle dynamique mal connu ( $\leftarrow$  contrôle optimal hiérarchisé)
  - Précision limitée des modèles et des coûts
    - $\Rightarrow$  importance de la robustesse (généricité) du critère
  - Non-unicité du coût solution du problème.
  - Aucune méthode générale.
- Méthode de validation: un programme en 3 étapes
  - 1 Modélisation: proposer une classe de problèmes de contrôle optimal
  - 2 Analyse: mise en évidence de propriétés qualitatives caractéristiques  
 $\rightarrow$  réduction de la classe de problèmes  
  
(utilisation du contrôle géométrique)
  - 3 Comparaison: méthodes numériques  $\rightarrow$  choix du meilleur  $L$ .

- Difficultés:

- $\Gamma$  = données expérimentales (bruits, feedbacks, etc)
- Modèle dynamique mal connu ( $\leftarrow$  contrôle optimal hiérarchisé)
- Précision limitée des modèles et des coûts
  - $\Rightarrow$  importance de la robustesse (généricité) du critère
- Non-unicité du coût solution du problème.
- Aucune méthode générale.

- Méthode de validation: un programme en 3 étapes

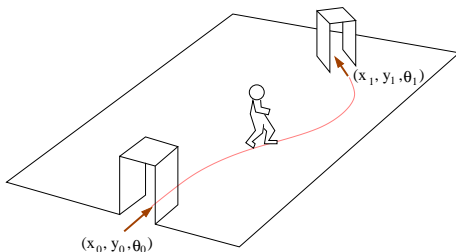
- 1 Modélisation: proposer une classe de problèmes de contrôle optimal
- 2 Analyse: mise en évidence de propriétés qualitatives caractéristiques  
 $\rightarrow$  réduction de la classe de problèmes  
 (utilisation du contrôle géométrique)
- 3 Comparaison: méthodes numériques  $\rightarrow$  choix du meilleur  $L$ .

# Outline

- 1 Contrôle optimal inverse
- 2 Goal oriented human locomotion**
- 3 Mouvements de pointage



# Trajectories of the Human Locomotion



Goal-oriented human locomotion (Berthoz, Laumond et al.)

Initial point  $(x_0, y_0, \theta_0)$   $\rightarrow$  Final point  $(x_1, y_1, \theta_1)$   
 $(x, y$  position,  $\theta$  orientation of the body)

QUESTIONS :

Which trajectory is experimentally the most likely?

What criterion is used to choose this trajectory?

# Trajectories of the Human Locomotion

## HYPOTHESIS:

the chosen trajectory is solution of a minimization problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \int L(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dots) dt \\ \text{among all "possible" trajectories} \\ \text{joining the initial point to the final one.} \end{array} \right.$$

## → TWO QUESTIONS:

- What are the possible trajectories ? dynamical constraints?
- How to choose the criterion ? (inverse optimal control problem)

# Modelling

Using:

- experimental observations, mostly from  
[Arechavaleta-Laumond-Hicheur-Berthoz, 2006] (= [ALHB])
- symetries of the problem;
- the existence of solutions;

we obtain a class of optimal control models.

## Inverse Optimal Control Problem

Given recorded experimental data (e.g. [ALHB])), infer a cost function  $L$  such that the recorded trajectories are optimal solutions of

$$\mathbf{P}_k(L) \left[ \begin{array}{l} \min C_L(u) = \int_0^T L(\dot{\theta}, \dots, \theta^{(k)}) dt \quad (k \geq 1) \\ \text{subject to} \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \theta^{(k)} = u \end{cases} \quad u \in L^p \\ \text{with } (x, y, \theta)(0) = (x_0, y_0, \theta_0) \text{ and } (x, y, \theta)(T) = (x_1, y_1, \theta_1). \end{array} \right.$$

Class of admissible costs  $L = \text{convex w.r.t. } \theta^{(k)} + \text{technical conditions}$

## MAIN QUESTION

What is the value of  $k$ ?

## Analysis of $\mathbf{P}_k(L)$

### Proposition

- For every target, there exists an optimal trajectory of  $\mathbf{P}_k(L)$ .
- The optimal synthesis of a problem  $\mathbf{P}_k(L)$  is stable under perturbations of the cost (robustness).

### CONSEQUENCES

A solution of the inverse problem = a cost and his perturbations  
→ we will look for the simplest cost in this class

**Question:**  $k = 1$  for the simplest one?

**Remark on the problem  $\mathbf{P}_1(L)$ :** Up to a canonical rotation + translation  $\Phi$ , the minimizers of  $\mathbf{P}_1(L)$  form a one-parameter class of curves.

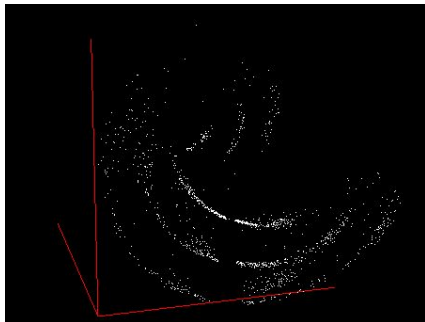
→ Let  $\mathcal{T}_k$  be the set of trajectories of  $\mathbf{P}_k(L)$  s.t.  $\dot{\theta} = 0$  at some time.

### Proposition

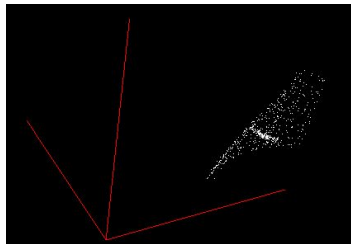
For every fixed  $t$ ,

- the set  $\Phi_t(\mathcal{T}_1)$  is a **curve** in  $\mathbb{R}^3$ ;
- for  $k \geq 2$ , the set  $\Phi_t(\mathcal{T}_k)$  contains at least a **surface** in  $\mathbb{R}^3$ .

## Numerical test:



( $\Phi_t$  applied at three different times  $t_1, t_2, t_3$  to  $\sim 700$  recorded trajectories)



( $\Phi_t$  applied to trajectories with  $k = 2$ )

## Conclusion

Models with  $k = 1$  should be sufficient to describe human locomotion

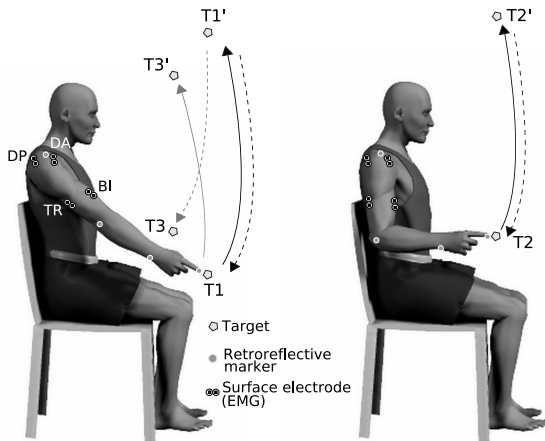
# Outline

- 1 Contrôle optimal inverse
- 2 Goal oriented human locomotion
- 3 Mouvements de pointage**

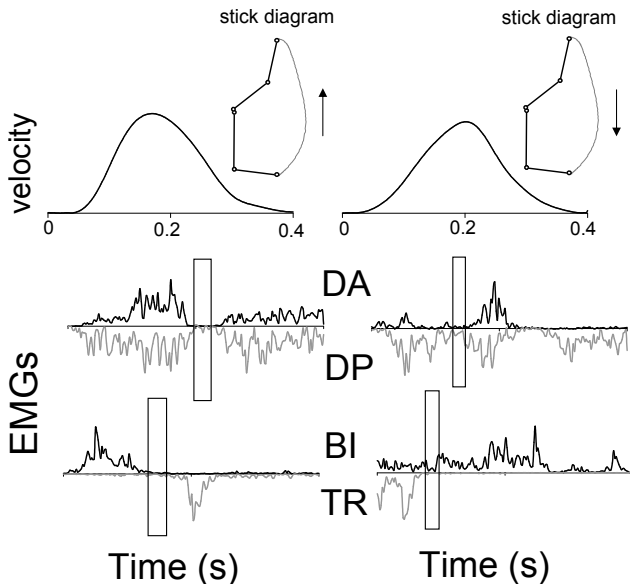


## Expériences

- Mouvements de pointage dans le plan sagittal
- Mouvements rapides et en temps fixé
- 1, 2 ou 3 degrés de liberté (ddl)



## Données expérimentales typiques pour 2 ddl



# Traits caractéristiques

Des caractéristiques qualitatives marquées:

- inactivations simultanées de muscles opposés;
- asymétrie du profil de vitesse  
(phase d'accélération plus courte que celle de décélération);

... et d'autre plus quantitatives:

- (pour 2 et 3 ddl) courbure de la trajectoire du doigt;
- (pour 3 ddl) configuration finale du bras.

# Traits caractéristiques

Des caractéristiques qualitatives marquées:

- **inactivations simultanées** de muscles opposés;
- asymétrie du profil de vitesse  
(phase d'accélération plus courte que celle de décélération);

... et d'autre plus quantitatives:

- (pour 2 et 3 ddl) courbure de la trajectoire du doigt;
- (pour 3 ddl) configuration finale du bras.

# Modélisation

Un membre est un système mécanique commandé, décrit par:

$$\rightarrow \quad M(x)\ddot{x} = \psi(x, \dot{x}) + u,$$

- $u$  = action des muscles (couples),
- $\psi(x, \dot{x})$  = gravité + frictions + Coriolis;

$$\Leftrightarrow \quad \dot{X} = \phi(X, u), \quad X = (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Contraintes de borne sur  $u$ :

$$u \in [u_1^-, u_1^+] \times \dots \times [u_n^-, u_n^+], \quad u_i^- < 0 < u_i^+$$

# Problème de contrôle optimal

- Critère à minimiser:  $J(u) = \int_0^T f(X, u) dt.$

Hyp.  $u \mapsto f(X, u)$  strictement convexe.

- Donnée initiale:  $X_s = (x_s, 0)$ , cible:  $X_t = (x_t, 0)$ .
- Le temps  $T > 0$  est fixé.

## Problème de contrôle optimal

( $\mathcal{P}$ ) minimiser le coût intégral  $J(u)$  parmi les trajectoires de  $\dot{X} = \phi(X, u)$  joignant  $X_s$  à  $X_t$  en temps  $T$ .

## Nécessité d'un coût non dérivable

### Définition

$u$  admet une **inactivation** si une de ses composantes  $u_i$  est  $\equiv 0$  sur un intervalle non vide.

Not:  $\mathcal{SC}$  = ensemble des fonctions  $f(X, u)$  strictement convexes et dérivables par rapport à  $u$ .

### Théorème

Pour un coût  $f \in \mathcal{SC}$  générique,  
aucun minimiseur de  $(\mathcal{P})$  n'admet d'inactivation.

$\Rightarrow$  le coût  $f$  est nécessairement non dérivable /  $u$

(Preuve: Principe du Maximum + transversalité de Thom)

## Condition suffisante

Type de coût proposé:

- nécessairement non dérivable /  $u$
- lié à la dépense énergétique

Candidat: le *travail absolu* des forces contrôlées.

- Travail des forces contrôlées:

$$w = \int u dx = \int \sum_{i=1}^n u_i dx_i = \int \sum_{i=1}^n u_i \dot{x}_i dt.$$

- Mesure de la dépense énergétique = travail absolu:

$$Aw = \int \dot{A}w(X, u), \quad \text{où} \quad \dot{A}w(X, u) = \sum_{i=1}^n |u_i \dot{x}_i|$$

→  $\dot{A}w$  non dérivable /  $u$  dès qu'une composante  $u_i = 0$ .



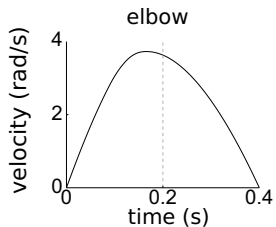
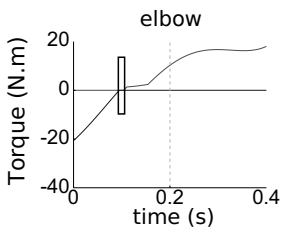
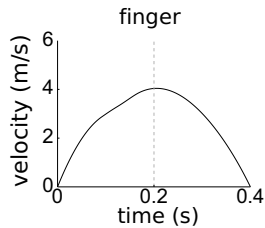
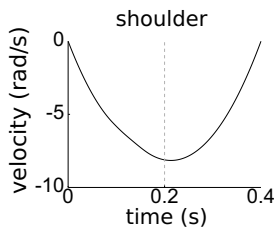
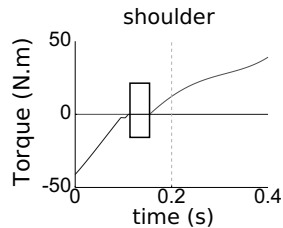
Coût proposé:  $J(u) = \int_0^T f(X, u) dt$  avec

$$f(X, u) = \varphi(\dot{A}w, X, u), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{A}w} \neq 0$$

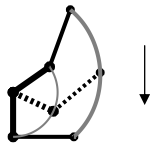
### Principe d'inactivation

Minimiser un coût  $J(u)$  de ce type implique la présence d'inactivations dans toutes les trajectoires optimales de  $(\mathcal{P})$  quand  $T$  est suffisamment petit.

## Simulations (2 ddl)



stick diagram



## Données expérimentales typiques pour 2 ddl

